

PREGUNTA 3 (ÁLGEBRA)

1. Determina la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

- ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A ? Justifica la respuesta?
- Para $k=0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I).A=A^t$.

2. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a .

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (a+1)y + 2z = y \\ x - 2y + (2-a)z = 2z \end{cases}$$

3. Determina X que verifique:

$$AXA - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ determina para qué valores del parámetro m

existe A^{-1} .

b) Para $m=-1$, resuelve $|A^{-1} - xI| = 0$.

5. Calcula el valor de α para el que la inversa de A coincide con $1/5$ de A .

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

6. De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que $\det(A)=4$, se pide:

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det \begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$

b) Calcula $\det(A^{-1}.A^t)$

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3=I$, halla $\det(B)$.

7. Discute el siguiente sistema según los valores de a y resuélvelo en el caso de que el sistema tenga infinitas soluciones:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

- Determinar para que valores de k la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.
- Resolver la ecuación $A \cdot B \cdot X = 3I$ para $k=0$, donde I es la identidad de orden 2.

9. Sean A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Estudia si existe algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A - \alpha I)^2 = B$

10. Calcula la matriz X que verifica:

$$XA + B^t = X$$

$$\text{Siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Razona utilizando las propiedades de los determinantes:

- La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A .
- La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A .
- Si A es una matriz cuadrada de orden cuatro, ¿qué relación existe entre $\det(A)$ y $\det(kA)$?

12. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de m , **(2,5 puntos)**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$$

13. (a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $X + (AB)^t =$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Tiene X matriz inversa? Justifica la respuesta.

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese las matrices X que

satisfacen $XCA = CA^2$.

15. - Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Siendo m es un número real. Encontrar los valores de m para los que AB es inversible.

16. Se considera el sistema
$$\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \end{cases}$$

a) Discútase según los valores del parámetro λ .

b) Resuélvase para $\lambda = -3$.

c) Resuélvase para $\lambda = 1$.

17. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

(a) Halla la matriz X que verifica $AX + B = 2A$.

(b) Calcula B^2 y B^{2016} .

18. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \\ x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

19. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula el rango de $AB^t + \lambda I$ según los valores de λ .

(b) Calcula la matriz X que verifica $CX - X = 2I$.

20. Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los

siguientes determinantes:

(a) $\det(3A)$.

(b) $\det(A^{-1})$.

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.