PREGUNTA 4 (GEOMETRÍA)

1. Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones y la recta que corta perpendicularmente a ambas:

$$x-5=\frac{y+1}{0}=\frac{z-8}{2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x=4+\mu \\ y=3-\mu \\ z=5+4\mu \end{cases}$$

2. Sean r y s las rectas dadas por:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \qquad s\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{2}$$

   a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.
   b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

3. Considera los puntos A(-1,k,3), B(k+1,0,2), C(1,2,0) y D(2,0,1)
   a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\vec{AB},\ \vec{BC}\ y\ \vec{CD}$ sean linealmente dependientes?**.**
   b) Calcula los valores de k para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1.

4. Considera el sistema de ecuaciones lineales;

$$\equiv\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=8 \\ 3x-y+mz=-2m \end{cases}$$

   (a) Determina si existe y, en ese caso, calcula el valor del parámetro *m* para el cual los tres planos determinados por las ecuaciones del sistema se cortan en una línea recta.
   (b) Halla la ecuación del plano que contienen a la recta determinada en el apartado anterior y pasa por el punto (2, 1, 3).

5. Calcula el área del triángulo de vértices A(0,0,1), B(0,1,0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1,1,1) sobre el plano x+y+z=1.

6. Determina el punto P de la recta r ≡ (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3 que equidista del origen de coordenadas y del punto A(3, 2, 1).

7. Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(2,-1,3).

   (a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

(b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

8. - Dados los puntos A(1,0,0), B(0,0,1) y P(1,−1,1), y la recta r definida por $\begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$

   (a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
   (b) Calcula el área del triángulo ABP.

9. Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices A(−1,0,3), B(2,−1,1) y C(3,2,−3).
   a) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
   b) Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.
   c) Calcula las coordenadas del vértice D.

10. - Considera los puntos A(1,2,3) y B(−1,0,4).
    a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
    b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

11. Sea la recta r dada por 2x + y − mz =2
    x − y − z = −m
    y el plano π definido por x + my − z =1
    (a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?
    (b)¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?
    (c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando m=0?

12. Considera el punto P(3, 2, 0) y la recta r de $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$
    (a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
    (b) Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

13. Considera los puntos A(0,3,-1) y B(0,1,5).
    (a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y C(x,4,3) tiene un ángulo recto en C.
    (b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (0,1,5) y (3,4,3) y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

14. Halla un punto A de la recta r de ecuación x = y = z y un punto B de la recta s de ecuación x = y/(-1) = (z + 1)/2 de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

15. Se sabe que los puntos A(m, 0, 1), B(0, 1, 2), C (1, 2, 3) y D(7, 2, 1) están en un mismo plano.

(a) Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.
(b) ¿Están los puntos B, C y D alineados?

16. Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación x+y+z=1 y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3}$.

17. Sean los vectores $v_1 = (0,1, 0)$, $v_2 = (2,1, -1)$ y $v_3 = (2, 3, -l)$.
(a) ¿Son los vectores v_1, v_2 y v_3 linealmente dependientes?
(b) ¿Para qué valores de a el vector (4, a + 3, -2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3?
(c) Calcula un vector unitario y perpendicular a v_1 y v_2.

18. Considera los puntos P(2,3,1) y Q(0,1,1)
(a) Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.
(b) Calcula la distancias de P a π.

19. Encuentra los puntos de la recta $r \equiv (x-1)/4 = (2-y)/2 = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 1$ vale cuatro unidades.

20. Se consideran los vectores u = (k, 1, 1); v = (2, 1, -2) y w = (1, 1, k), donde k es un número real.
(a) Determina los valores de k para los que u, v y w son linealmente dependientes.
(b) Determina los valores de k para los que u + v y v – w son ortogonales.
(c) Para k = -1, determina aquellos vectores que son ortogonales a v y w y tienen módulo 1.